EPFL

Physique Générale: Mécanique

02.01: Rappels mathématiques: calcul vectoriel

Sections SC, GC & SIE

Version du 04.9.2024

Dr. J.-P. Hogge,
Swiss Plasma Center
École polytechnique fédérale de Lausanne

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

- Rappels sur le calcul vectoriel

Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

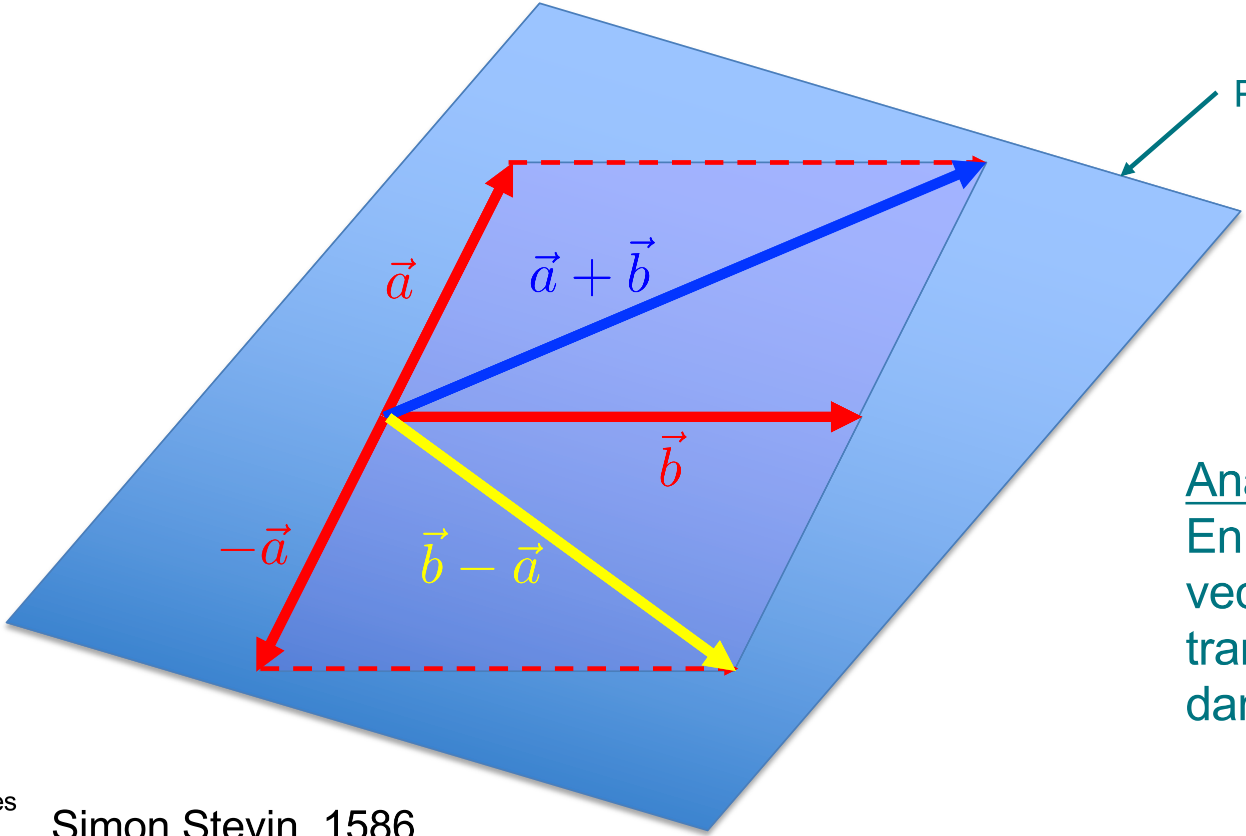
Définition: **Scalaire**
Un scalaire est une grandeur définie par un nombre et une unité

Exemples:
Masse [kg], temperature [ºC, K], énergie [J, eV], charge de l'electron [c]

Définition: **Vecteur** (William Hamilton, 1843)
Objet défini par plusieurs grandeurs numériques définissant son module (ou norme, ou intensité) et son orientation, et une unité.

Exemples:
Position (x,y,z) [m], vitesse (v_x,v_y,v_z) [m/s] d'un objet, quantité de mouvement (p_x,p_y,p_z) [kg m/s], forces (F_x,F_y,F_z) [kg m/s^2], vecteur rotation etc….

Somme et différence de vecteurs

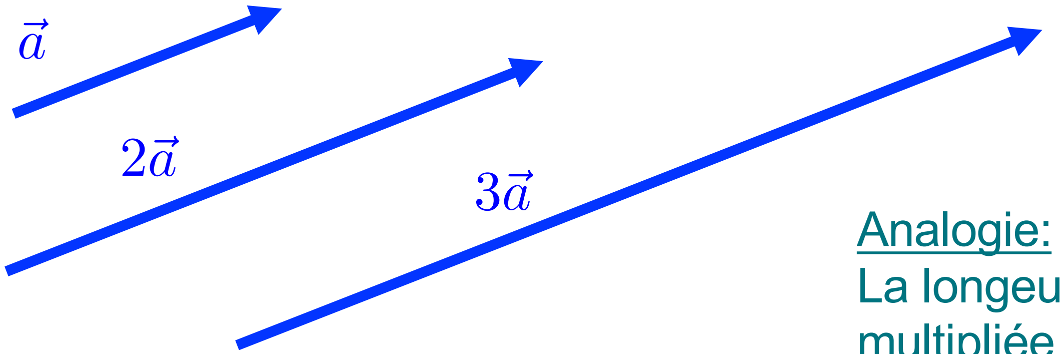


Plan contenant $\vec{a}$ et $\vec{b}$

Analogie:
En géométrie Euclidienne, un vecteur correspond à une translation d'une certaine longueur dans une certaine direction

Simon Stevin, 1586

Multiplication d'un vecteur par un scalaire



<u>Analogie:</u>
La longeur de la flèche est multipliée par le scalaire

Scalaires et vecteurs: repère

Pour différencier un vecteur d'un scalaire, différentes conventions sont utilisées:

$$\vec{v} \qquad \mathbf{v} \qquad \underline{v}$$

$$\hat{\vec{\imath}} \qquad \hat{\mathbf{i}} \qquad \hat{\boldsymbol{x}}_1 \quad \longleftarrow$$

Longueur 1 (convention)

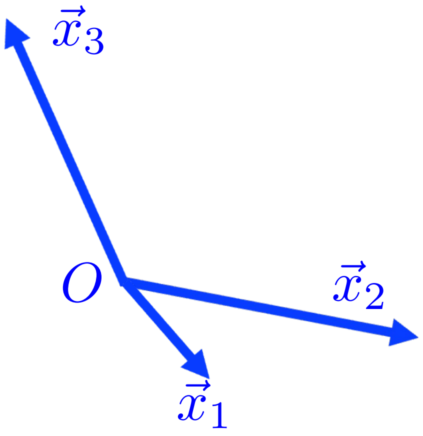
N'oubliez pas de repérer les vecteurs, de la manière qui vous convient.

Soyez cohérent·e avec les notations que vous utilisez. Gardez les mêmes tout au long de l'exercice.

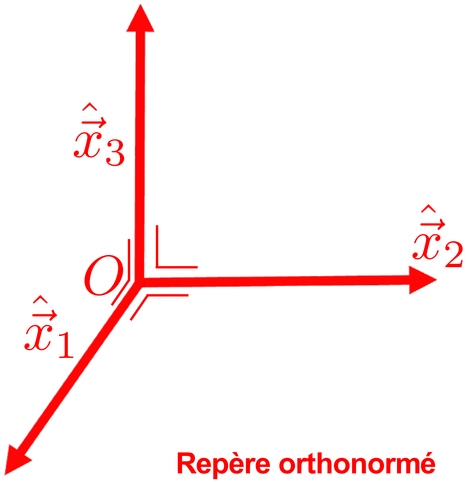
Dans une équation, si l'expression de gauche est vectorielle, celle de droite doit également l'être

<u>Définition:</u> **Repère**
Un repère est défini par un point de l'espace (origine) et trois (en 3D) vecteurs non-coplanaires

Si de plus les vecteurs sont unitaires (de longueur 1), perpendiculaires entre eux (orthogonaux) et orientés selon la règle du tire-bouchon, alors on parle de **repère orthonormé**. Nous nous limiterons à ce cas-là.



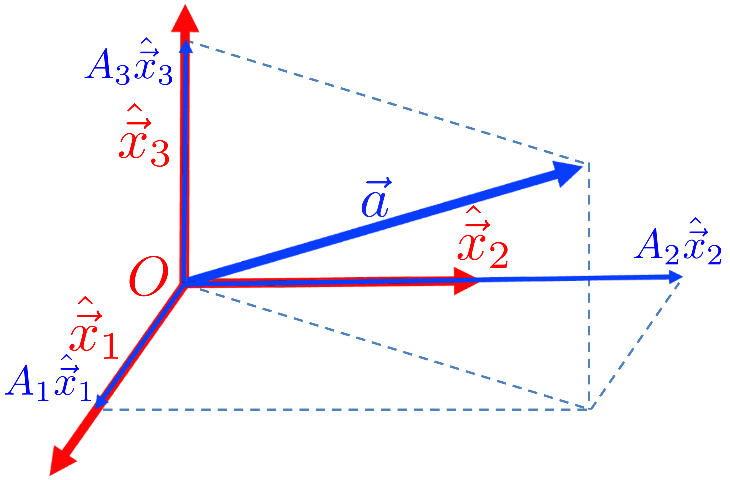
Repère quelconque



Repère orthonormé

Composantes d'un vecteur dans un repère

Les composantes du vecteur $\vec{a}$ dans le repère orthonormé $O, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3$
sont obtenues par projection de $\vec{a}$ sur les vecteurs de base $\hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3$



Il y a différentes conventions pour écrire un vecteur en composantes

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} = A_1\hat{\vec{x}}_1 + A_2\hat{\vec{x}}_2 + A_3\hat{\vec{x}}_3 = \sum_{i=1}^{3} A_i\hat{\vec{x}}_i = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = (A_1, A_2, A_3)$$

Composantes de la somme de deux vecteurs:

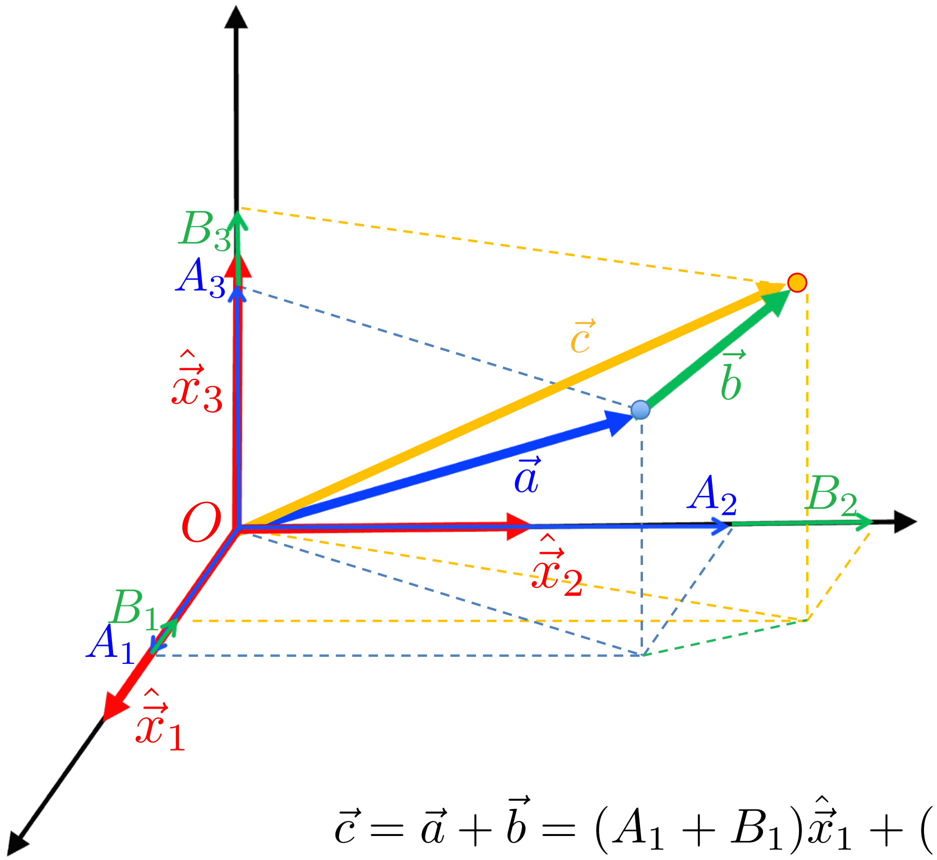
$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \qquad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Multiplication d'un vecteur par un scalaire:

$$\lambda\vec{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Somme de deux vecteurs



$$\vec{a} = A_1\hat{\vec{x}}_1 + A_2\hat{\vec{x}}_2 + A_3\hat{\vec{x}}_3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

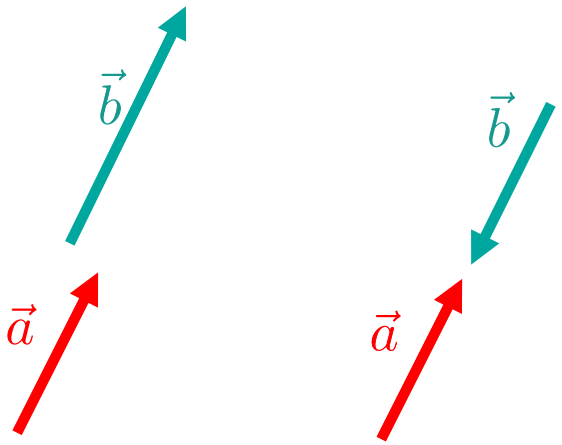
$$\vec{b} = B_1\hat{\vec{x}}_1 + B_2\hat{\vec{x}}_2 + B_3\hat{\vec{x}}_3 = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (A_1 + B_1)\hat{\vec{x}}_1 + (A_2 + B_2)\hat{\vec{x}}_2 + (A_3 + B_3)\hat{\vec{x}}_3 = \begin{pmatrix} A_1 + B_1 \\ A_2 + B_2 \\ A_3 + B_3 \end{pmatrix}$$

Définitions: vecteurs colinéaires

Définition: Deux vecteurs $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sont **colinéaires** si $\vec{b} = \lambda\vec{a} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$b_1 = \lambda a_1, \quad b_2 = \lambda a_2, \quad b_3 = \lambda a_3$$

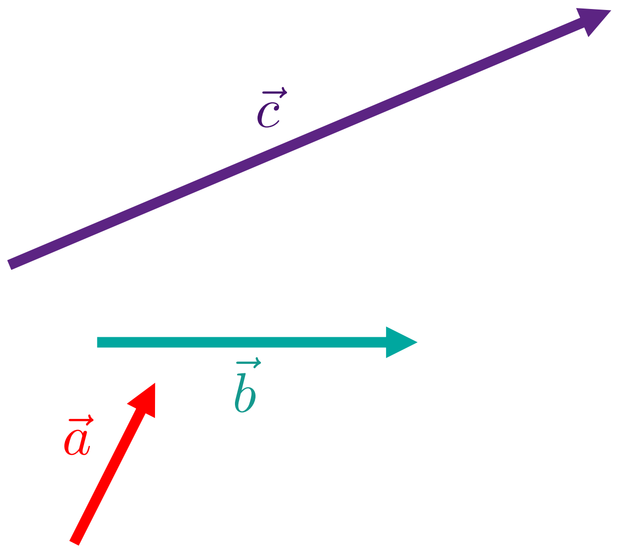


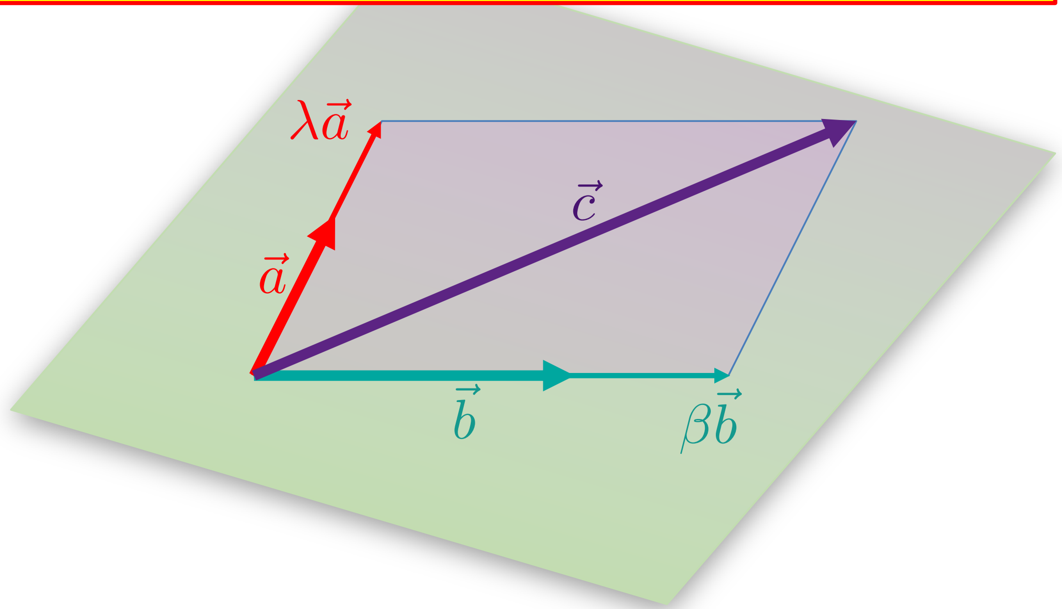
Les deux vecteurs ont la même direction, mais peuvent avoir des longeurs, des supports et des sens différents.

Définitions: vecteurs coplanaires

<u>Définition:</u> Trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont **coplanaires** si ils sont dans le même plan. On a alors:

$$\vec{c} = \lambda\vec{a} + \beta\vec{b} \quad \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$





Définitions: Vecteurs linéairement indpendants

Définition: Trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sont **linéairements indépendants** si ils ne sont ni colinéaires, ni coplanaires:

$$\lambda\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda, \beta, \gamma = 0$$

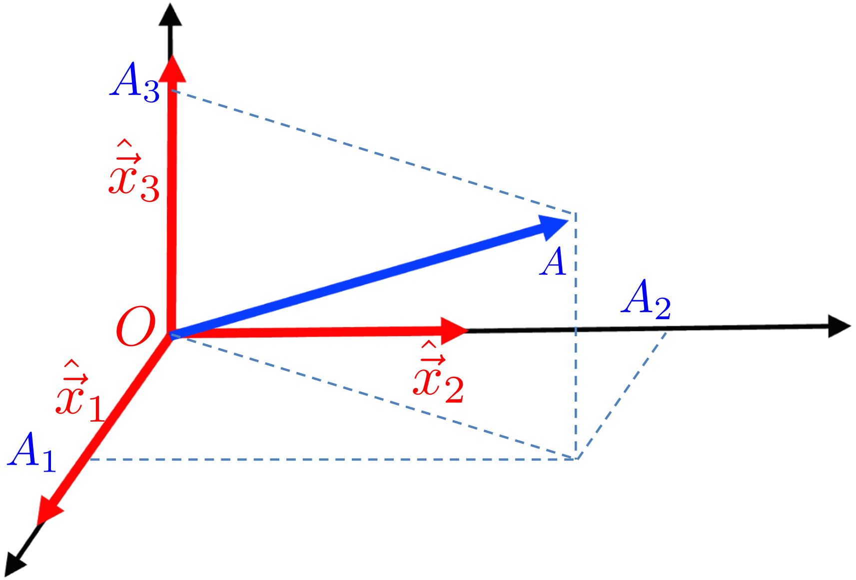
Faculté des sciences de base

Swiss Plasma Center

Norme d'un vecteur

Définition: Norme (ou module, ou intensité)
La norme d'un vecteur est sa longueur. C'est un scalaire.

Si le repère $(O, \hat{\boldsymbol{x}}_1, \hat{\boldsymbol{x}}_2, \hat{\boldsymbol{x}}_3)$ est orthonormé, alors le théorème de Pythagore permet d'écrire:



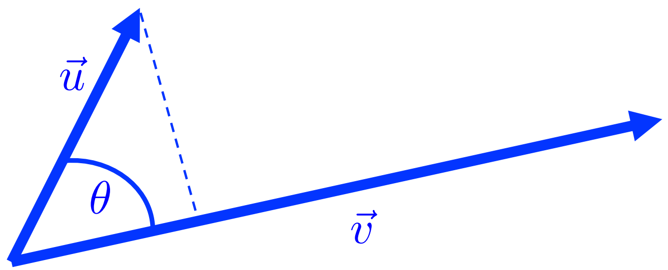
$$\overrightarrow{OA} = (A_1, A_2, A_3)$$

$$|\overrightarrow{OA}| = \|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Produit scalaire entre deux vecteurs

<u>Définition:</u> **Produit scalaire**
Le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ faisant un angle θ est le **nombre** réel défini par:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos\theta$$



Produit scalaire entre deux vecteurs

Propriétés:

1. $\vec{u} \parallel \vec{v} \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = ||\vec{u}||\,||\vec{v}||$

2. $\vec{u} \perp \vec{v} \implies \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

3. Commutativité: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$

4. Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ alors

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3}$$

5. Distributivité: $\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \vec{u} \cdot \vec{v}_2}$

6. Le produit scalaire est indépendent du repère (orthonormé)

Produit scalaire dans un repère orthonormé

- En admettant que la distributivité a été démontrée, la propriété 4. est facile à prouver:

$$\vec{a} = A_1\hat{\vec{x}}_1 + A_2\hat{\vec{x}}_2 + A_3\hat{\vec{x}}_3 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = B_1\hat{\vec{x}}_1 + B_2\hat{\vec{x}}_2 + B_3\hat{\vec{x}}_3 = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

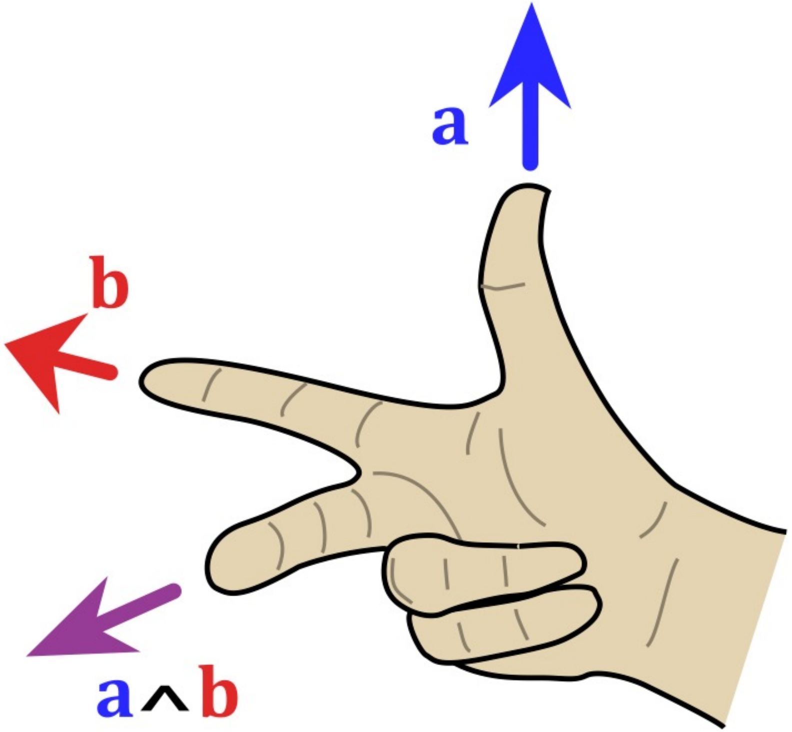
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (A_1\hat{\vec{x}}_1 + A_2\hat{\vec{x}}_2 + A_3\hat{\vec{x}}_3) \cdot (B_1\hat{\vec{x}}_1 + B_2\hat{\vec{x}}_2 + B_3\hat{\vec{x}}_3)$$

$$= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

Produit vectoriel

- Produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$:

  Nous avons défini le **produit scalaire** entre deux vecteurs, dont le résultat est un nombre reel. Le résultat du **produit vectoriel** que nous allons définir sera donc un vecteur.



REGLE DE LA
MAIN DROITE

Définition: **Produit vectoriel**

Soit $(O, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3)$ un repère orthonormé, et deux vecteurs $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$

Le produit vectoriel entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$, noté $\vec{a} \wedge \vec{b}$ ou $\vec{a} \times \vec{b}$ est le **vecteur** défini par

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\vec{x}}_1 & a_1 & b_1 \\ -\hat{\vec{x}}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{\vec{x}}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \hat{\vec{x}}_1 (a_2 b_3 - a_3 b_2) + \hat{\vec{x}}_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + \hat{\vec{x}}_3 (a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Propriétés du produit vectoriel

1. Le produit vectoriel entre deux vecteurs est perpendiculaire à chacun d'eux, et donc au plan qu'ils définissent.

Pour montrer que deux vecteurs sont perpendiculaires, on peut montrer que leur produit scalaire est nul.

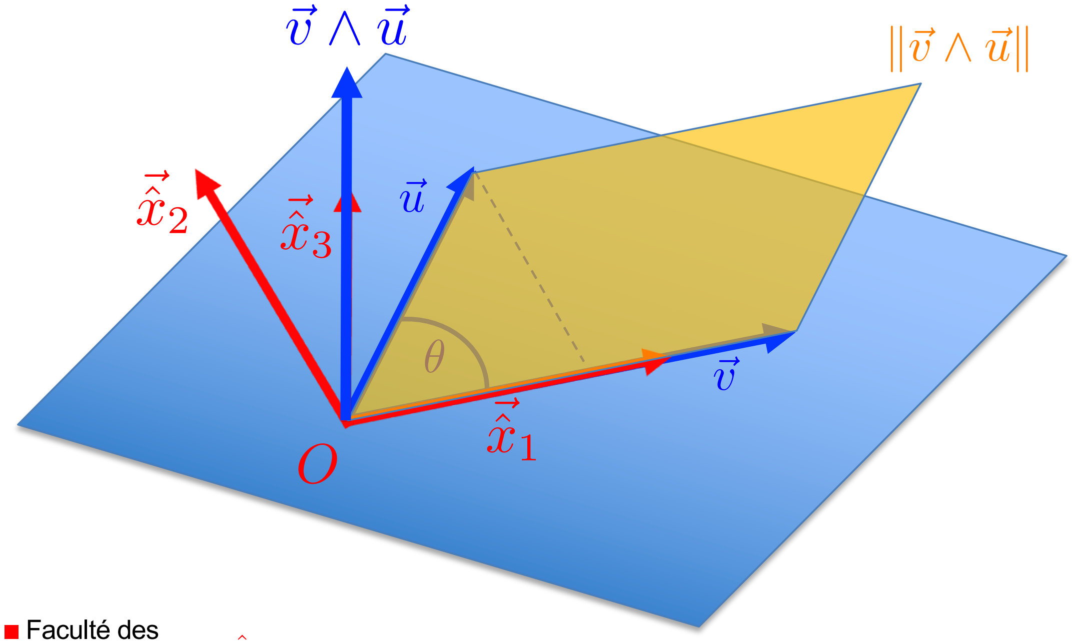
$$\vec{a}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = a_1a_2b_3 - a_1a_3b_2 + a_2a_3b_1 - a_1a_2b_3 + a_1a_3b_2 - a_2a_3b_1 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (\vec{a}\wedge\vec{b}) \perp \vec{a}$$

$$\vec{b}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b}) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = a_2b_1b_3 - a_3b_1b_2 + a_3b_1b_2 - a_1b_2b_3 + a_1b_2b_3 - a_2b_1b_3 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (\vec{a}\wedge\vec{b}) \perp \vec{b}$$

2. La norme du produit vectoriel est égale à l'aire du parallélogramme défini par les deux vecteurs.



$$\vec{v} = (\|\vec{v}\|, 0, 0)$$

$$\vec{u} = (\|\vec{u}\| \cos\theta, \|\vec{u}\| \sin\theta, 0)$$

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\hat{x}}_1 & \|v\| & \|u\| \cos\theta \\ \vec{\hat{x}}_2 & 0 & \|u\| \sin\theta \\ \vec{\hat{x}}_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\|\vec{v} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\| \sin\theta}$$

$$\boxed{\vec{v} \perp \vec{u} \implies \|\vec{v} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{v}\| \|\vec{u}\|}$$

$$\boxed{\vec{v} \parallel \vec{u} \implies \|\vec{v} \wedge \vec{u}\| = 0}$$

- $\vec{\hat{x}}_1$ est parallèle à $\vec{v}$
- $\vec{\hat{x}}_2$ est perpendiculaire à $\vec{\hat{x}}_1$, dans le plan $(\vec{u}, \vec{v})$
- $\vec{\hat{x}}_3$ est perpendiculaire à $\vec{\hat{x}}_1$ et $\vec{\hat{x}}_2$

Identités vectorielles utiles

- Quelques identités vectorielles que nous utiliserons, données sans démonstration:

$$\boxed{\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})}$$

Produit triple

$$\boxed{\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})}$$

Produit mixte

$$\boxed{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})}$$

- Composantes du vecteur $\vec{u}$ exprimées dans le repère $(O, \hat{\vec{x}}_1, \hat{\vec{x}}_2, \hat{\vec{x}}_3)$:

$$\vec{u} = u_1\hat{\vec{x}}_1 + u_2\hat{\vec{x}}_2 + u_3\hat{\vec{x}}_3 = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = (u_1, u_2, u_3)$$

- Norme:

$$|\vec{u}| = \|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- Produit scalaire entre deux vecteurs:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Propriétés:
$$\begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} = \|u\|\|v\| \cos\theta \\ \vec{u} \parallel \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \\ \vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longrightarrow \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

Résumé (2)

- Produit vectoriel:

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{\vec{x}}_1 & a_1 & b_1 \\ \hat{\vec{x}}_2 & a_2 & b_2 \\ \hat{\vec{x}}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\wedge\vec{b} = \hat{\vec{x}}_1(a_2b_3 - a_3b_2) + \hat{\vec{x}}_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \hat{\vec{x}}_3(a_1b_2 - a_2b_1)$$

Propriétés: $\begin{cases} (\vec{a}\wedge\vec{b}) \perp \vec{a},\vec{b} \\ \|\vec{a}\wedge\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta \\ (\vec{a}\wedge\vec{b}) = -(\vec{b}\wedge\vec{a}) \\ \vec{a}\perp\vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{a}\wedge\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \\ \vec{a}\parallel\vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \|\vec{a}\wedge\vec{b}\| = 0 \end{cases}$

- Identités:

$$\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{c}) = \vec{b}\cdot(\vec{c}\wedge\vec{a}) = \vec{c}\cdot(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

$$(\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot(\vec{c}\wedge\vec{d}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$